数理解析研究所講究録
74巻 1969年 10-15

Skorohod "On the local structure of continuous Markov processes" の紹介 II

名古屋大 教養 神田護

§0. 序

この小文では，Skorohod の上記の題目の論文の一部の簡単な紹介をする。櫃田倍之氏による前半の紹介にひきつづき，ここでは後半の前半を扱う。しかし一応独立に書いたので記号は統一していないと思うが，できるだけ原論文に忠実にする。原論文の内容については不備な点がある事と，結果的にも，ここで紹介する範囲は，M. Motoo - S. Watanabe あるいは H. Kunita - S. Watanabe の結果に含まれる所が多いので証明はつけない。なお後半の後半は その意図は非常に興味深いが筆者には証明できぬ事と 最近東京教育大の小林氏等によりそれに関連した興味深い結果及び Skorohod の主張に対する反例等もでているので ここでは省略させて頂く。

注意 以下で考えている process は，relative compact な domain $\mathcal{U}$ 上の process で 原論文の条件をすべてみたしてい

るものとする。更に，原論文の前半1〜5までの主張は全て正しいものとする。

§1. M-functional の直交性及び完備性

Φ_M を M-functional の全体とする。

<u>定義</u>. $\alpha_t, \beta_t \in \Phi_M$　α_t と β_t が直交する

$$\Updownarrow$$

$$E_x \alpha_t \beta_t = 0, \ \forall x \in U, \ \forall t \geq 0$$

この時，$\alpha_t \perp \beta_t$ とかく。

<u>Prop</u>. 次の性質は，$\alpha_t \perp \beta_t$ と同等である。

1) $\langle \alpha, \beta \rangle_t = 0, \quad \forall t \geq 0$

2) $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x) = 0$　（0 を $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ の1つのversionとしてとれるの意）

<u>Prop</u>. $\alpha_t^{(i)}, i=1,2,\cdots \in \Phi_M$ に対して

$$\alpha_t^{(x)(1)} \equiv \alpha_t^{(1)}, \quad \alpha_t^{(x)(k)} \equiv \alpha_t^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \alpha^{(x)(j)}}(x_s)\, d\alpha_s^{(x)j}$$

とおけば，$\alpha_t^{(x)(i)}{}_{i=1,2,\cdots} \in \Phi_M$ かつ $\alpha_t^{(x)(i)} \perp \alpha_t^{(x)(j)}$, $i \neq j$ である。

<u>定義</u> 上のようにして得られた $\alpha_t^{(x)(i)}, i=1,2,\cdots$ を $\alpha_t^{(i)}, i=1,2,\cdots$ より直交化して得られた system という。

次に Φ_M に位相をいれよう。

<u>定義</u> Φ_M の位相；$\alpha_t^{(n)} \in \Phi_M$ が $\alpha_t \in \Phi_M$ に収束するとは任意の $t \geq 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in U} E_x(\alpha_t^{(n)} - \alpha_t)^2 = 0$

となる事である。

<u>注意</u> 原論文では，次の条件になっている。

$(\star)'$，$E_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2$ が ${}^\forall t \geqq 0$ に対して U で有界　かつ

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2 = 0$$

筆者にはその定義では　次の定理が示せなかった。

<u>定理</u>（原論文 Th 6.2）Φ_M の完備性；$\alpha_t^{(n)}{}_{,n=1,2,\cdots} \in \Phi_M$，$\alpha_t \in \Phi_M$，

$$\alpha_t^{(n)} \to \alpha_t \quad \text{in } \Phi_M$$

$$\Updownarrow$$

$$(\star^*) \qquad \lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in U} E_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t^{(m)})^2 = 0$$

この定理の証明は原論文でなされてないが（勿論原論文で $(\star)$ の部分が $(\star)'$ の α_t を $\alpha_t^{(m)}$ でおきかえたものになっている），筆者が Dynkin の本を真似してやった方法はハンザツである。原論文の条件 $(\star)'$ からは，α_t の連続性が示せなかった。

<u>定義</u>（~~原論文 Th 6.3~~）$\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$ が Φ_M で完全（complete）であるとは，${}^\forall i$ に対して $\beta_t \perp \alpha_t^{(i)}$ となる $\beta_t \in \Phi_M$ は 0 に限る。

<u>定理</u>（原論文 Th 6.3）$\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$ を完全な互に直交する M-functional の system とする。その時　${}^\forall \beta_t \in \Phi_M$ は

$$\beta_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(j)}}(x_s)\, d\alpha_s^{(j)}$$

ここで級数の収束は Φ_M の位相による。

定理（原論文 Th 6.4）特に process が Feller process で A はそれの強 infinitesimal operator とする。その時 A の domain に属する函数の列 $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\cdots}$ があって

$$\hat{\varphi}_i(t) = \varphi_i(x_t) - \varphi_i(x_0) - \int_0^t A\varphi_i(x_s)\,ds$$

とおけば，$\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1,2,\cdots}$ は Φ_M で完全となる。

7. Maximal functionals. The Rank of a process

定義 $\alpha_t \in \Phi_M$ が $\beta_t \in \Phi_M$ を subordinate するとは

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x_s)\,d\alpha_s$$

となる事である。この時 $\beta_t \prec \alpha_t$ とかく。

定義 $\alpha_t \in \Phi_M$ が maximal $\Longleftrightarrow$ $\alpha_t \prec \beta_t$ なら常に $\beta_t \prec \alpha_t$.

定理（原論文 Th 7.1）$\{\alpha_t^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$, $\alpha_t^{(k)} \in \Phi_M$ を互に直交する完全な system とする。定数 $C_k \neq 0$ があって $\sum_{k=1}^{+\infty} C_k \alpha_t^{(k)} = \beta_t$ が Φ_M で収束するならば，β_t は maximal functional である。

定理（原論文 Th 7.2）$\alpha_t \in \Phi_M$, $\beta_t \in \Phi_M$, β_t ; maximal その時 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t \ll \langle\beta,\beta\rangle_t$

Prop α_t ; maximal, $\beta_t \in \Phi_M$, $\langle\alpha,\alpha\rangle_t \ll \langle\beta,\beta\rangle_t$

$$\Downarrow$$

β_t ; maximal

<u>定理</u>（原論文 Th. 7.4）M-functional の列 $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$ が完全であったとする。その時，任意の $\alpha_t \in \Phi_M$ は，ある maximal functional によって subordinate される。

（そのような maximal functional は次のようなものを選べばよい。P2 の Prop. と P4 の定理（原論文 Th 7.1）から少くとも maximal functional は存在するからそれを γ_t とする。P4の定理（原論文 Th 7.2）より $\langle\alpha,\alpha\rangle_t \ll \langle\gamma,\gamma\rangle_t$ だから $\langle\alpha,\alpha\rangle_t = \int_0^t g(\alpha_u)\, d\langle\gamma,\gamma\rangle_u$ とかける。$\bar{\gamma}_t \equiv \langle\gamma,\gamma\rangle_t - \int_0^t \frac{1}{g(\alpha_u)} d\langle\alpha,\alpha\rangle_u$ とおけば，
$\bar{\gamma}_t = \int_0^t g_1(\alpha_u)\, d\langle\gamma,\gamma\rangle_u$ とかけ，$\bar{\gamma}_t$ と $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ は singular なことから $g_1(\alpha_u) = 1$ or 0，$d\langle\gamma,\gamma\rangle_u$-a.e が分る。$\beta_t \equiv \alpha_t + \int_0^t g_1(\alpha_u)\, d\gamma_u$ とおけば それが求めるものである。）

<u>定義</u> $\{\alpha_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$，$\alpha_t^{(i)} \in \Phi_M$ が nondegenerate であるとは，任意の $\alpha_t^{(k)}$ が $\{\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(k-1)}\}$ によって $\alpha_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t g_j(\alpha_u)\, d\alpha_u^{(j)}$ とあらわされる事がない事である。

<u>注意</u> M-functional の system が完全であったとする。その時，maximal functional の system $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$ で完全かつ nondegenerate，更に $\langle\beta^{(i)},\beta^{(i)}\rangle_t = \langle\beta^{(j)},\beta^{(j)}\rangle_t$，$\forall i,j$ となるものがえらべる。

さて rank の概念を導入しよう。

<u>定義</u> $\{\beta_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots}$ を上の注意によって得られた maximal functional の system とする。

$$\Gamma(x) \equiv \text{rank of} \begin{pmatrix} \frac{\partial\beta^{(1)}}{\partial\beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial\beta^{(1)}}{\partial\beta^{(2)}}(x), & \cdots \\ \frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial\beta^{(1)}}(x), & \frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial\beta^{(2)}}(x), & \cdots \\ \frac{\partial\beta^{(3)}}{\partial\beta^{(1)}}(x) & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

とおき，$\Gamma(x)$ を process の rank という。M-functional のない process を rank 0 という。

注意　$\Gamma(x)$ 及び $\Gamma_1(x)$ を同じ process の rank とする。その時 $\int_0^t \chi_0(\Gamma_1(x_u) - \Gamma(x_u))\,d\sigma_u = 0$, almost surely，但し $\chi_0(k)=0$ for $k=0$, $\chi_0(k)=1$ for $k\neq 0$, $\sigma_u = \langle\beta,\beta\rangle_u$, β は maximal functional とする。原論文の定理7.5はそのままでは誤りである。trivial でないどのような条件の下でそのような事がなりたつか筆者は知らない。